Ekstremværdianalyse af vandføringsdata

Notat fra DCE - Nationalt Center for Miljø og Energi Dato: 31.januar 2014

Forfatter: Søren Erik Larsen og Niels Bering Ovesen

Institut for Bioscience

Rekvirent:
Naturstyrelsen, Klimatilpasning
Antal sider: 20

Faglig kommentering:
Brian Kronvang
Kvalitetssikring, centret:
Poul Nordemann Jensen

AARHUS
UNIVERSITET
DCE – NATIONALT CENTER FOR MILJØ OG ENERGI

Tel.: +45 8715 0000
E-mail: dce@au.dk
http://dce.au.dk

Der er gennemført ekstremværdianalyser på data fra 29 afstrømningsstationer for de to perioder 1961-1990 og 1991-2010 jf. tabel 1. Statistiske fordelingsfunktioner er estimeret individuelt for hver station på årsmaksimumvandføringen inden for hydrologisk år.

Dette notat indeholder en metode beskrivelse af de gennemførte statistiske analyser samt tabeller og figurer med estimater for T=5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 og 1000 års begivenheder. Endelig er usikkerheden på disse estimater vurderet ud fra 95 % konfidensintervallet. Der er endvidere beregnet medianminimums vandføring for hver af de 29 stationer for hver af de 2 måleperioder.

Der er udtrukket daglige vandføringsdata fra den nationale overfladevandsdatabase, ODA for den samlede periode 1961-2010 for de 30 stationer, der indgår i den statistiske analyse. En mindre del af stationerne har ikke komplette tidsserier for begge perioder jf. tabel 2. For hver station er den udtrukne tidsserie opdelt i to deltidsserier: 1961-1990 og 1991-2010. For hvert hydrologisk år (1. maj til 30. april) udtrækkes herefter den maksimale daglige vandføring.

T-års overskridelserne er estimeret ved anvendelse af 2 forskellige ekstremværdi-fordelingsfunktioner, hhv. den generaliserede ekstremværdi fordeling (tabel 1a og 1b) og Gumbel-fordeling (tabel 1c og 1d). Den generaliserede ekstremværdi fordeling er en individuelt tilpasset 3 parameter fordelingsfunktion, hvorimod Gumbel-fordelingen er en mere simpel funktion med kun 2 parametre. Værdierne er estimeret for hver periode ved brug af de årlige maksimalværdier og fordelingerne anvendes til at beregne estimater for T-års begivenhederne med tilhørende 95 % konfidensintervaller.

Maksimumværdier for vandføringstidsserier er behæftet med betydelig usikkerhed bl.a. fordi beregningerne i mange tilfælde foretages ud fra ekstrapolation af sammenhængen mellem vandstand og vandføring. Denne sammenhæng er endvidere ikke konstant. Derfor kan der forekomme homogenitetsbrud i dataserierne, og de forskelle, der ses mellem de 2 undersøgte perioder, kan således delvis skyldes denne usikkerhed. Endvidere kan data fra enkelte stationer i mindre grad være påvirket af reguleringer (opstemninger) i oplandet. Vandføringen i den nedre del af Gudenåen er betydelig påvirket af regulering, så data fra stationer herfra er ikke medtaget i analyserne.

Appendiks 1 indeholder plots af T-års overskridelserne med de tilhørende 95 % konfidensintervaller. I Appendiks 2 er der givet en teoretisk gennemgang af de statistiske metoder der er anvendt til beregningerne.

St.nr.	Vandløb, lokalitet	Median-minimum	Ekstremværdihændelser 1961 - 1990, m^3/sek. Generaliseret fordeling T = år							
			5	10	20	50	100	200	500	1000
030003	Uggerby å, Astedbro	0,55	11,85	13,52	15,54	18,72	21,52	24,63	29,45	33,59
070003	Lindholm å, ns Køkkengrøften	0,14	6,23	6,90	7,71	8,95	10,02	11,20	12,98	14,49
110016	Årup å, Årup	0,49	7,02	7,35	7,64	7,93	8,09	8,22	8,34	8,40
140022	Lindenborg å, Lindenborg bro	1,70	9,31	11,05	13,44	17,87	22,48	28,41	39,32	50,48
180077	Skals Å, Løvel Bro	2,43	10,76	11,04	11,27	11,51	11,64	11,74	11,83	11,89
200026	Skive å, Hagebro	4,09	15,25	16,23	17,22	18,46	19,34	20,13	21,09	21,75
210085	Gudenå, Åstedbro	0,80	17,21	18,13	18,94	19,80	20,30	20,69	21,10	21,32
220062	Storå, Skærum Bro	7,65	59,01	62,11	64,86	67,83	69,58	70,96	72,38	73,19
250082	Skjern å, Ahlergaarde	8,01	60,48	68,23	77,31	91,06	102,68	115,15	133,65	148,92
260082	Århus å, Skibby	0,22	6,04	6,51	6,95	7,48	7,83	8,13	8,47	8,69
270021	Giber Å, Fulden	0,03	4,58	5,08	5,59	6,26	6,74	7,18	7,74	8,12
330004	Spang Å, Bredstrup	0,14	5,32	5,57	5,79	6,01	6,13	6,23	6,32	6,37
350010	Sneum å, Nørå bro	1,26	20,41	22,01	23,49	25,18	26,25	27,14	28,11	28,70
360008	Kongeå, Kongebro	2,40	23,04	24,21	25,28	26,50	27,26	27,88	28,57	28,98
380024	Ribe å, Stavnager	3,36	45,05	48,10	50,95	54,23	56,31	58,05	59,96	61,14
400001	Brede å, ns jernbanebro	1,06	21,13	22,18	23,12	24,12	24,70	25,16	25,64	25,91
420016	Grønå, Rørkær	1,83	28,83	30,93	32,98	35,46	37,13	38,59	40,30	41,41
450001	Odense å, Nørre Broby	1,22	33,12	34,52	35,67	36,79	37,39	37,82	38,22	38,42
450004	Odense å, Ejby Mølle	0,47	20,14	21,20	22,13	23,10	23,66	24,10	24,54	24,78
460030	Brende å, Årup	0,03	3,69	3,81	3,90	3,99	4,03	4,06	4,09	4,10
520025	Græse å, Hørup	0,04	0,62	0,68	0,74	0,81	0,86	0,90	0,96	0,99
520029	Havelse å, Strø	0,10	4,08	4,64	5,27	6,14	6,81	7,49	8,41	9,11
550018	Åmose å, Bromølle	0,28	12,91	13,78	14,60	15,57	16,19	16,72	17,32	17,69
560006	Harrested å, Kramsvadgård	0,01	1,40	1,51	1,60	1,71	1,78	1,83	1,89	1,93
560007	Tude å, Ørslev	0,07	6,63	7,09	7,53	8,04	8,37	8,64	8,95	9,14
570049	Saltø å, Grønbro	0,01	4,84	5,14	5,40	5,68	5,84	5,96	6,09	6,16
570058	Suså, Holløse Mølle	0,81	28,07	29,30	30,28	31,20	31,67	32,00	32,29	32,43
590006	Tryggevælde å, Lille Linde	0,03	10,59	11,26	11,86	12,51	12,90	13,20	13,52	13,71
660014	Baggeå, Hasle Klinker	0,01	5,30	5,99	6,70	7,62	8,28	8,89	9,66	10,19

Tabel 1a

St.nr.	Vandløb, lokalitet	Median-minimum	Ekstremværdihændelser 1991 - 2010, m^3/sek. Generaliseret fordeling T = år							
			5	10	20	50	100	200	500	1000
030003	Uggerby å, Astedbro	0,39	8,50	9,07	9,63	10,29	10,73	11,12	11,57	11,85
070003	Lindholm å, ns Køkkengrøften	0,12	5,47	5,67	5,83	5,99	6,08	6,14	6,19	6,22
110016	Årup å, Årup	0,55	5,84	6,00	6,12	6,22	6,27	6,30	6,33	6,34
140022	Lindenborg å, Lindenborg bro	1,49	7,49	8,51	9,80	11,96	13,97	16,32	20,18	23,71
180077	Skals Å, Løvel Bro	2,29	10,61	11,16	11,69	12,33	12,75	13,11	13,53	13,80
200026	Skive å, Hagebro	4,31	15,13	15,75	16,28	16,83	17,15	17,38	17,62	17,74
210085	Gudenå, Åstedbro	0,87	16,16	17,19	18,07	19,00	19,53	19,93	20,32	20,54
220062	Storå, Skærum Bro	7,71	56,17	58,99	61,44	64,01	65,49	66,62	67,76	68,39
250082	Skjern å, Ahlergaarde	8,60	55,56	61,03	66,77	74,37	79,97	85,28	92,11	96,99
260082	Århus å, Skibby	0,18	5,46	5,88	6,28	6,73	7,03	7,27	7,54	7,71
270021	Giber Å, Fulden	0,03	4,42	5,08	5,83	6,91	7,78	8,68	9,95	10,95
330004	Spang Å, Bredstrup	0,14	4,86	5,07	5,25	5,43	5,52	5,59	5,66	5,70
350010	Sneum å, Nørå bro	1,21	15,65	16,21	16,64	17,03	17,22	17,35	17,46	17,51
360008	Kongeå, Kongebro	2,59	22,88	24,20	25,46	26,93	27,88	28,69	29,60	30,17
380024	Ribe å, Stavnager	3,36	36,85	39,01	41,01	43,25	44,64	45,79	47,02	47,76
400001	Brede å, ns jernbanebro	1,13	19,67	20,42	21,00	21,50	21,73	21,89	22,02	22,07
420016	Grønå, Rørkær	2,14	27,14	28,96	30,61	32,42	33,52	34,40	35,32	35,87
450001	Odense å, Nørre Broby	1,49	32,70	34,35	35,66	36,90	37,52	37,96	38,35	38,53
450004	Odense å, Ejby Mølle	0,54	20,99	22,37	23,56	24,80	25,51	26,05	26,58	26,87
460030	Brende å, Årup	0,04	3,31	3,55	3,78	4,03	4,19	4,32	4,47	4,56
520025	Græse å, Hørup	0,02	0,72	0,78	0,84	0,91	0,95	0,99	1,04	1,07
520029	Havelse å, Strø	0,06	4,24	4,40	4,53	4,64	4,69	4,72	4,75	4,76
550018	Åmose å, Bromølle	0,25	11,49	11,78	11,96	12,10	12,15	12,17	12,19	12,20
560006	Harrested å, Kramsvadgård	0,01	1,48	1,59	1,68	1,78	1,84	1,89	1,94	1,96
560007	Tude å, Ørslev	0,08	6,50	7,00	7,49	8,06	8,44	8,77	9,14	9,38
570049	Saltø å, Grønbro	0,01	5,52	6,18	6,88	7,80	8,47	9,11	9,94	10,52
570058	Suså, Holløse Mølle	0,59	28,09	30,00	31,72	33,60	34,73	35,63	36,58	37,13
590006	Tryggevælde å, Lille Linde	0,06	9,50	9,95	10,32	10,68	10,88	11,01	11,14	11,21
660014	Baggeå, Hasle Klinker	0,02	5,24	6,20	7,36	9,17	10,75	12,49	15,17	17,46

Tabel 1b

St.nr.	Vandløb, lokalitet	Median-minimum	Ekstremværdihændelser 1961 - 1990, m^3/sek. Gumbel fordeling T = år							
			5	10	20	50	100	200	500	1000
030003	Uggerby å, Astedbro	0,55	11,20	12,38	13,67	15,48	16,88	18,27	20,17	21,60
070003	Lindholm å, ns Køkkengrøften	0,14	6,00	6,50	7,04	7,81	8,40	8,99	9,79	10,40
110016	Årup å, Årup	0,49	7,82	8,62	9,50	10,72	11,67	12,62	13,91	14,88
140022	Lindenborg å, Lindenborg bro	1,70	8,18	8,94	9,78	10,95	11,86	12,77	14,00	14,93
180077	Skals Å, Løvel Bro	2,43	11,48	12,18	12,95	14,01	14,84	15,67	16,79	17,64
200026	Skive å, Hagebro	4,09	15,75	17,06	18,49	20,49	22,05	23,59	25,70	27,28
210085	Gudenå, Åstedbro	0,80	19,00	20,99	23,18	26,23	28,59	30,95	34,15	36,58
220062	Storå, Skærum Bro	7,65	64,70	71,26	78,45	88,47	96,25	104,00	114,53	122,49
250082	Skjern å, Ahlergaarde	8,01	58,27	64,39	71,10	80,45	87,71	94,94	104,76	112,19
260082	Århus å, Skibby	0,22	6,47	7,21	8,01	9,14	10,01	10,88	12,07	12,96
270021	Giber Å, Fulden	0,03	4,76	5,38	6,07	7,02	7,76	8,50	9,50	10,26
330004	Spang Å, Bredstrup	0,14	5,90	6,50	7,15	8,05	8,76	9,46	10,41	11,13
350010	Sneum å, Nørå bro	1,26	22,40	25,23	28,34	32,67	36,04	39,39	43,94	47,38
360008	Kongeå, Kongebro	2,40	24,58	26,70	29,02	32,26	34,78	37,29	40,69	43,26
380024	Ribe å, Stavnager	3,36	48,69	54,02	59,87	68,02	74,36	80,67	89,23	95,71
400001	Brede å, ns jernbanebro	1,06	23,11	25,37	27,83	31,28	33,95	36,62	40,23	42,97
420016	Grønå, Rørkær	1,83	30,45	33,59	37,04	41,84	45,57	49,29	54,33	58,15
450001	Odense å, Nørre Broby	1,22	37,51	41,45	45,76	51,77	56,45	61,10	67,42	72,19
450004	Odense å, Ejby Mølle	0,47	22,34	24,72	27,33	30,96	33,79	36,60	40,42	43,30
460030	Brende å, Årup	0,03	4,17	4,57	5,00	5,61	6,08	6,54	7,18	7,66
520025	Græse å, Hørup	0,04	0,66	0,75	0,85	0,99	1,10	1,20	1,35	1,46
520029	Havelse å, Strø	0,10	4,07	4,63	5,25	6,11	6,78	7,45	8,35	9,04
550018	Åmose å, Bromølle	0,28	13,82	15,27	16,86	19,08	20,80	22,51	24,84	26,60
560006	Harrested å, Kramsvadgård	0,01	1,56	1,76	1,98	2,30	2,54	2,78	3,11	3,35
560007	Tude å, Ørslev	0,07	7,14	7,92	8,79	9,99	10,92	11,85	13,12	14,07
570049	Saltø å, Grønbro	0,01	5,45	6,12	6,85	7,87	8,66	9,44	10,51	11,32
570058	Suså, Holløse Mølle	0,81	32,75	36,65	40,91	46,86	51,48	56,08	62,33	67,06
590006	Tryggevælde å, Lille Linde	0,03	11,77	13,17	14,69	16,83	18,48	20,13	22,37	24,06
660014	Baggeå, Hasle Klinker	0,01	5,55	6,41	7,35	8,66	9,67	10,69	12,06	13,10

Tabel 1c

St.nr.	Vandløb, lokalitet	Median-minimum	Ekstremværdihændelser 1991 - 2010, m^3/sek. Gumbel fordeling							
			T = år							
			5	10	20	50	100	200	500	1000
030003	Uggerby å, Astedbro	0,39	8,98	9,85	10,81	12,15	13,19	14,23	15,63	16,70
070003	Lindholm å, ns Køkkengrøften	0,12	6,10	6,67	7,30	8,17	8,84	9,51	10,43	11,12
110016	Årup å, Årup	0,55	6,66	7,27	7,94	8,87	9,59	10,31	11,29	12,03
140022	Lindenborg å, Lindenborg bro	1,49	6,97	7,59	8,26	9,19	9,92	10,64	11,62	12,36
180077	Skals Å, Løvel Bro	2,29	11,09	11,95	12,90	14,21	15,24	16,25	17,64	18,68
200026	Skive å, Hagebro	4,31	16,57	18,05	19,67	21,93	23,68	25,43	27,80	29,60
210085	Gudenå, Åstedbro	0,87	18,47	20,89	23,53	27,21	30,08	32,93	36,80	39,73
220062	Storå, Skærum Bro	7,71	62,24	68,70	75,77	85,65	93,31	100,95	111,32	119,16
250082	Skjern å, Ahlergaarde	8,60	56,86	63,20	70,15	79,85	87,38	94,89	105,07	112,77
260082	Århus å, Skibby	0,18	5,94	6,66	7,45	8,55	9,40	10,25	11,40	12,28
270021	Giber Å, Fulden	0,03	4,33	4,92	5,58	6,49	7,20	7,91	8,87	9,59
330004	Spang Å, Bredstrup	0,14	5,44	5,99	6,60	7,44	8,10	8,75	9,64	10,31
350010	Sneum å, Nørå bro	1,21	18,21	20,19	22,36	25,39	27,74	30,09	33,27	35,68
360008	Kongeå, Kongebro	2,59	24,26	26,46	28,88	32,24	34,86	37,46	41,00	43,67
380024	Ribe å, Stavnager	3,36	39,82	43,83	48,22	54,34	59,10	63,83	70,27	75,13
400001	Brede å, ns jernbanebro	1,13	23,60	26,53	29,73	34,20	37,67	41,13	45,83	49,37
420016	Grønå, Rørkær	2,14	30,07	33,69	37,66	43,20	47,50	51,79	57,60	62,00
450001	Odense å, Nørre Broby	1,49	39,01	44,24	49,97	57,97	64,18	70,37	78,77	85,12
450004	Odense å, Ejby Mølle	0,54	24,08	27,31	30,85	35,79	39,62	43,44	48,62	52,54
460030	Brende å, Årup	0,04	3,62	4,06	4,53	5,20	5,72	6,23	6,93	7,46
520025	Græse å, Hørup	0,02	0,76	0,85	0,94	1,08	1,18	1,28	1,42	1,53
520029	Havelse å, Strø	0,06	5,18	5,86	6,61	7,65	8,47	9,27	10,37	11,20
550018	Åmose å, Bromølle	0,25	14,97	17,02	19,26	22,39	24,82	27,24	30,52	33,00
560006	Harrested å, Kramsvadgård	0,01	1,70	1,94	2,20	2,58	2,86	3,15	3,54	3,84
560007	Tude å, Ørslev	0,08	6,95	7,75	8,62	9,84	10,78	11,72	13,00	13,97
570049	Saltø å, Grønbro	0,01	5,68	6,45	7,30	8,49	9,40	10,32	11,56	12,50
570058	Suså, Holløse Mølle	0,59	31,26	35,11	39,33	45,21	49,78	54,33	60,51	65,18
590006	Tryggevælde å, Lille Linde	0,06	10,92	12,19	13,58	15,52	17,03	18,53	20,57	22,11
660014	Baggeå, Hasle Klinker	0,02	4,89	5,58	6,33	7,39	8,21	9,02	10,13	10,97

Tabel 1d

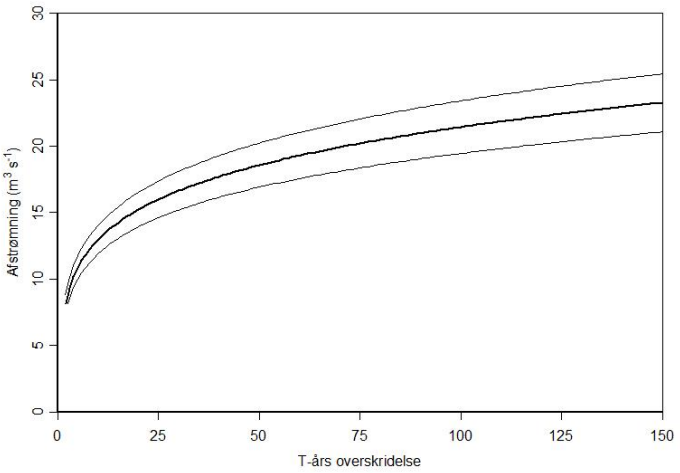
Station	Antal målte år i perioden	
	1961-1990	1991-2010
030003	30	20
070003	30	20
110016	30	20
140022	30	20
180077	18	20
200026	26	20
210085	30	20
220062	21	20
250082	30	20
260082	30	20
270021	30	16
330004	30	20
350010	26	20
360008	27	20
380024	30	20
400001	30	20
420016	30	20
450001	15	20
450004	30	20
460030	30	20
520025	30	20
520029	30	20
550018	30	20
560006	30	20
560007	30	20
570049	30	20
570058	30	20
590006	30	20
660014	13	20

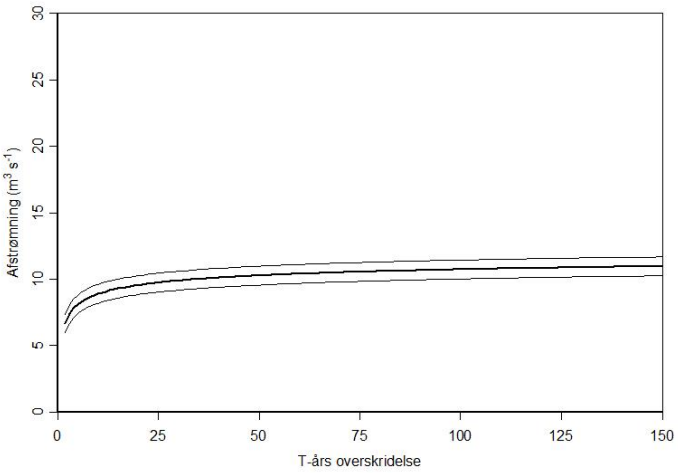
Tabel 2

Appendiks 1

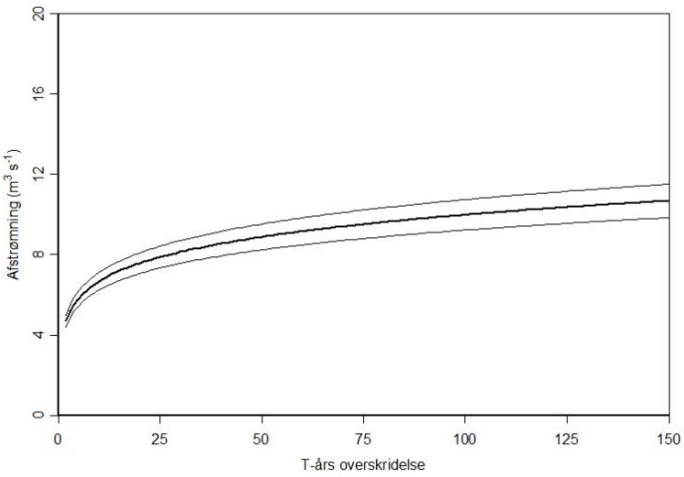
1961 – 1990 1991 – 2010

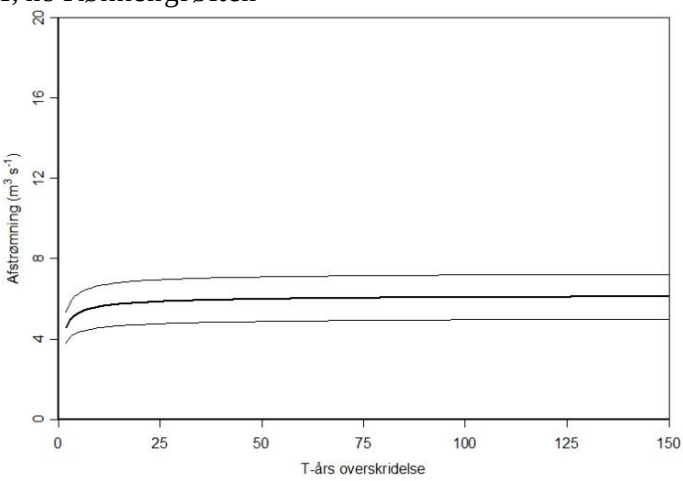
030003 Uggerby Å, Astedbro



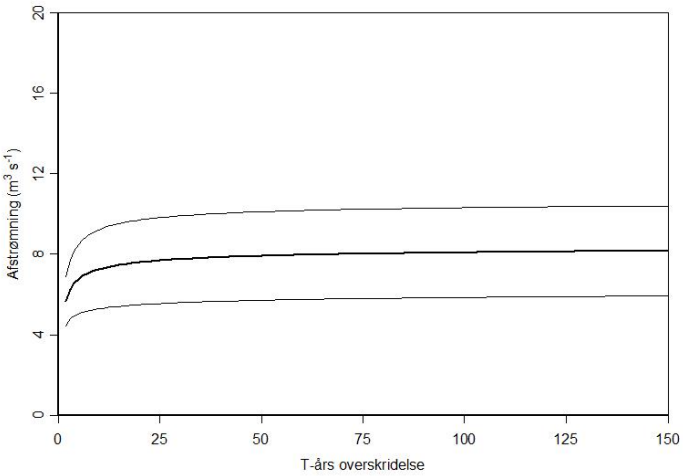


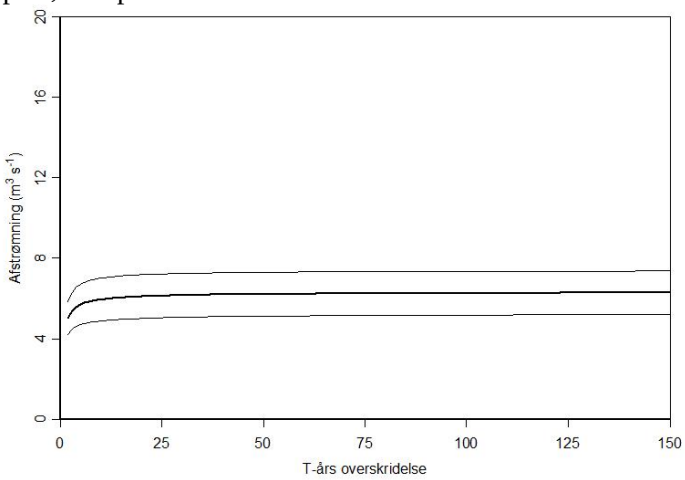
070003 Lindholm Å, ns Køkkengrøften





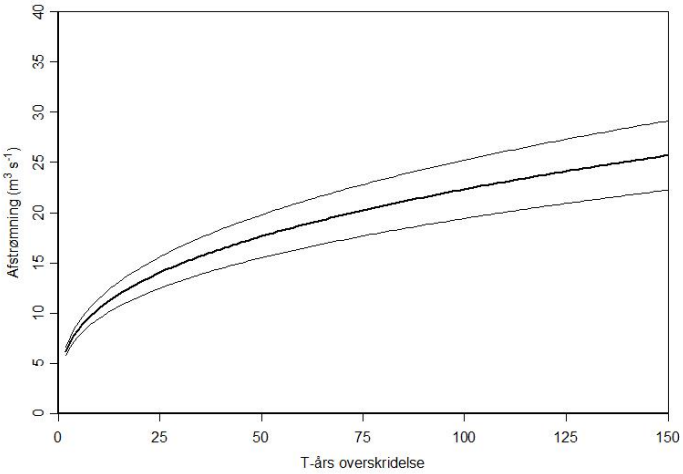
110016 Årup Å, Årup

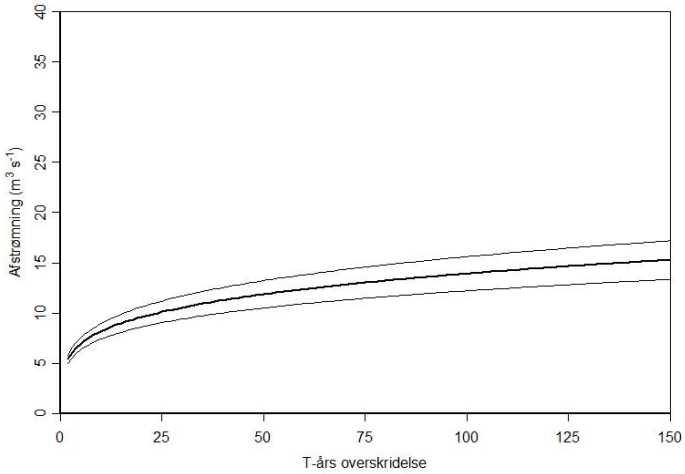




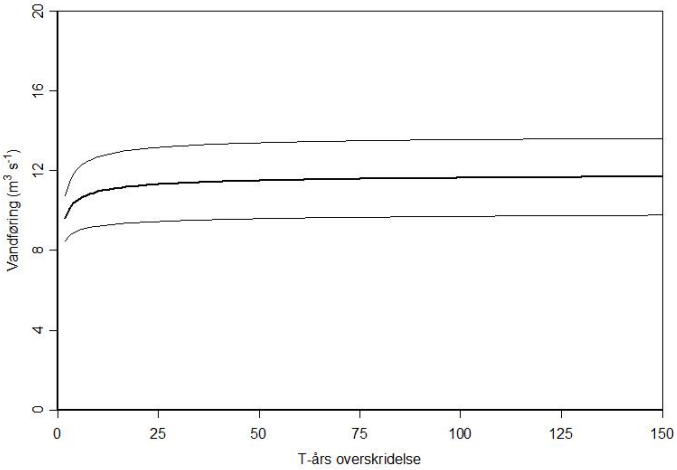
1961 – 1990 1991 - 2010

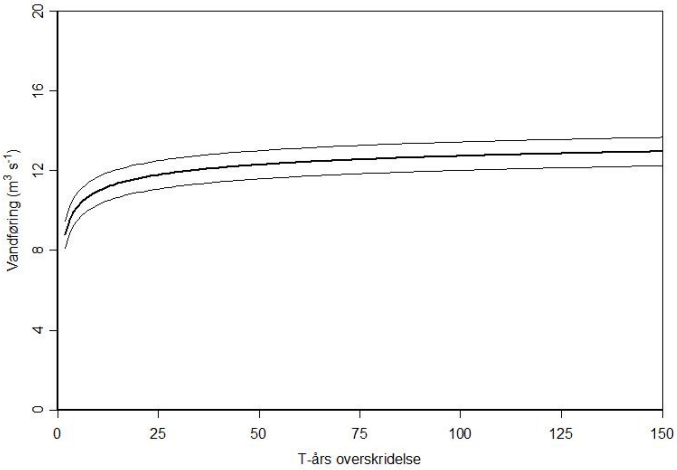
140022 Lindenborg Å, Lindenborg Bro



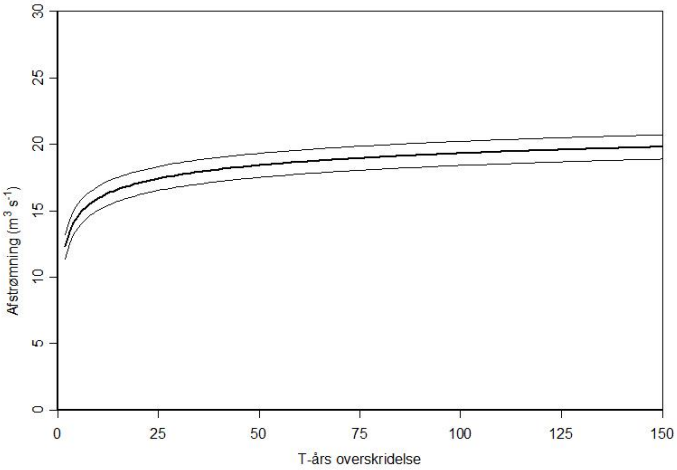


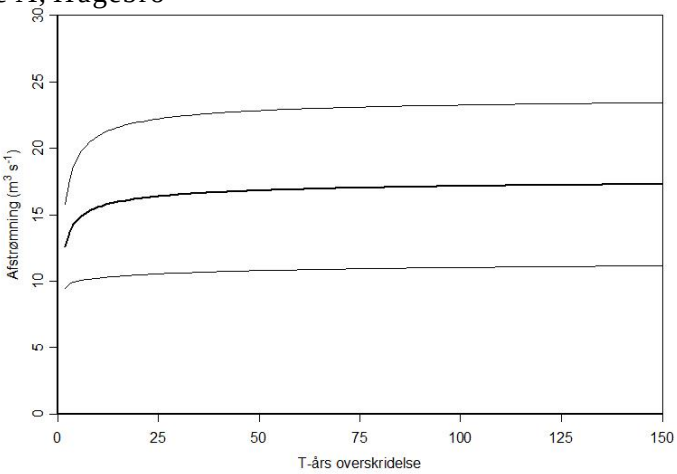
180077 Skals Å, Løvel Bro





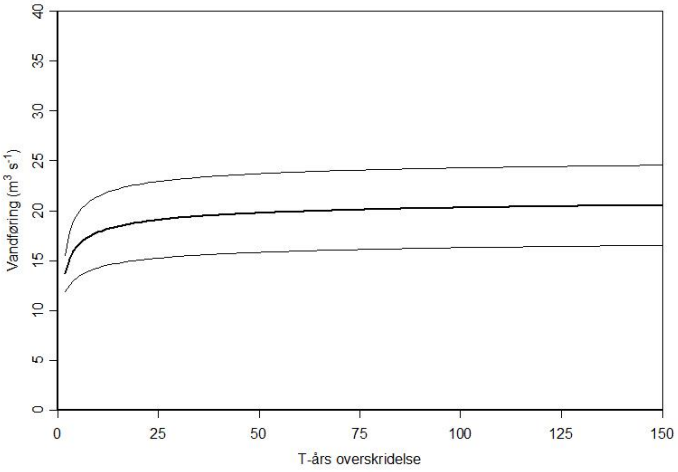
200026 Skive Å, Hagebro

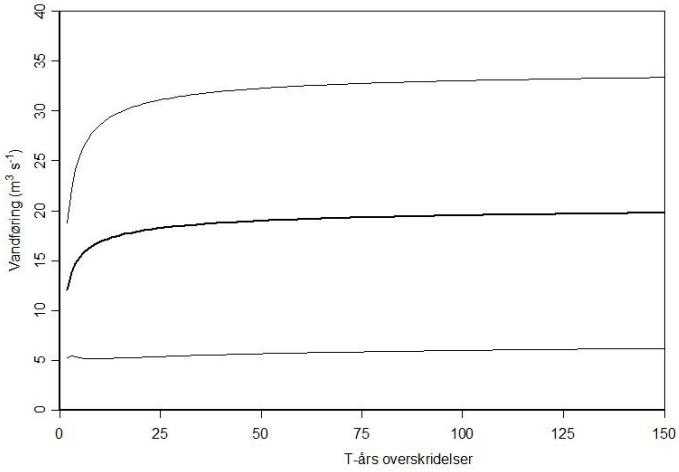




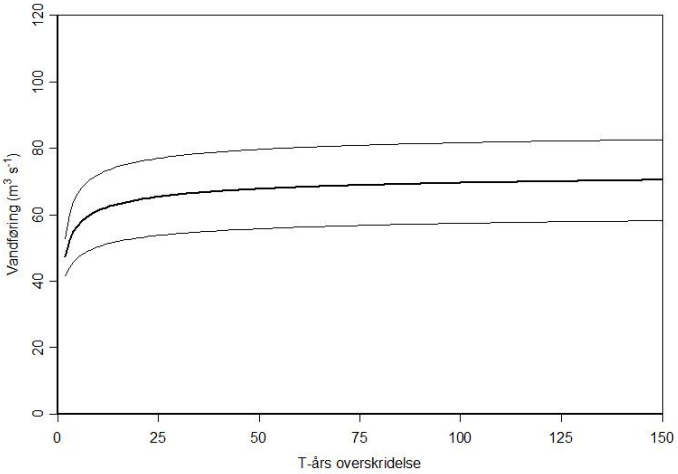
1961 – 1990 1991 - 2010

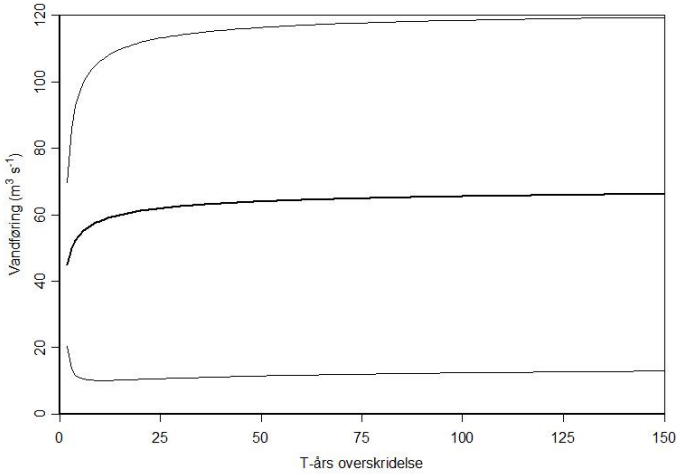
210085 Gudenå, Åstedbro





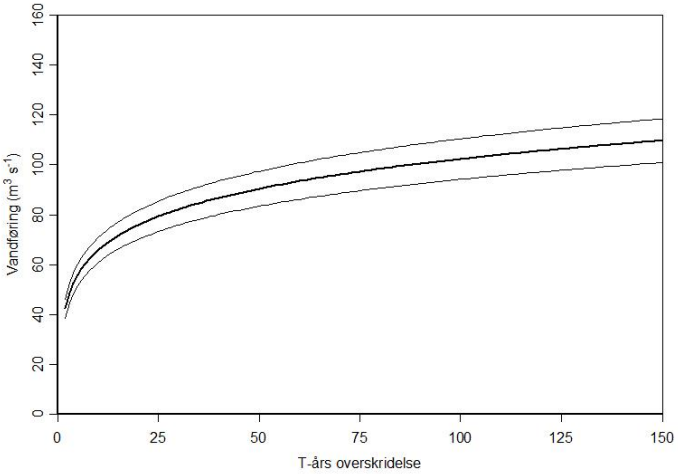
220062 Storå, Skærum Bro

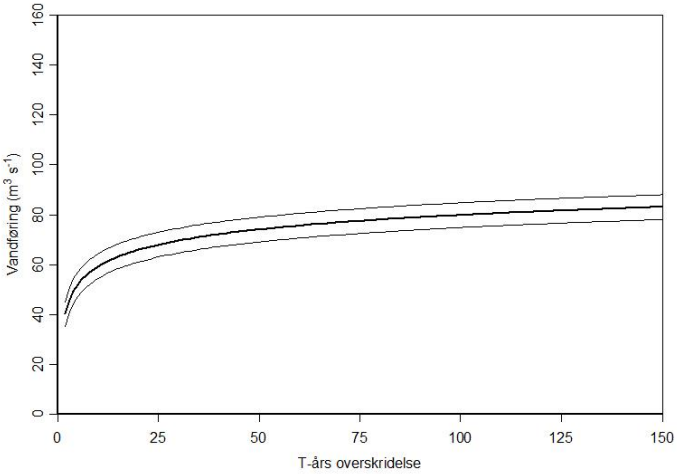




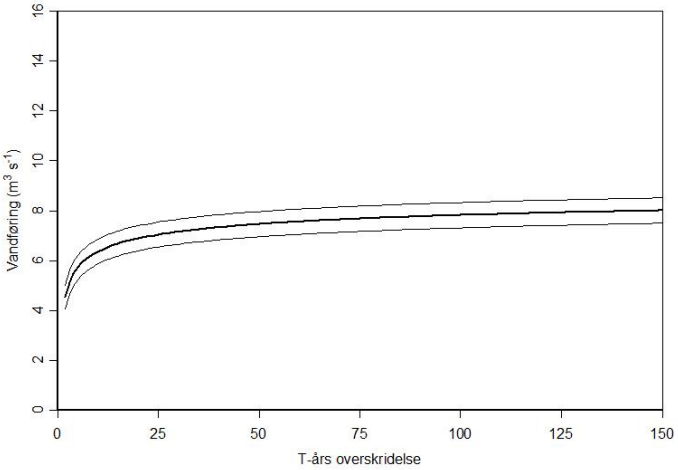
1961 – 1990 1991 - 2010

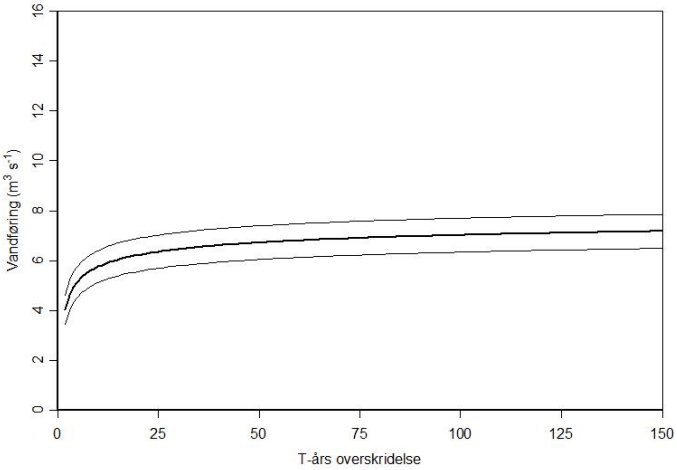
250082 Skjern Å, Ahlergaarde



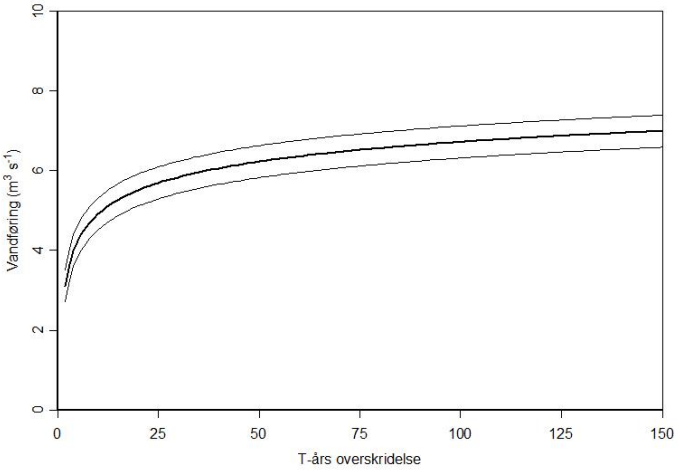


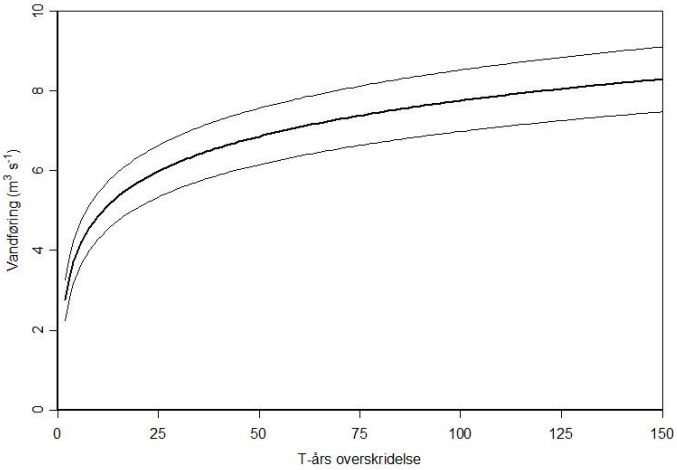
260082 Aarhus Å, Skibby





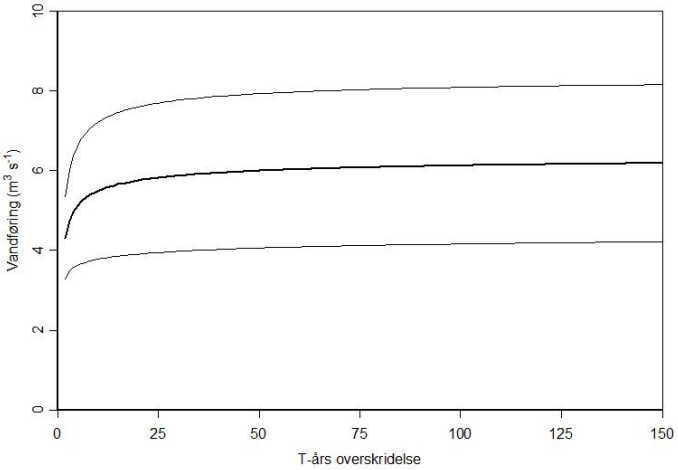
270021 Giber Å, Fulden

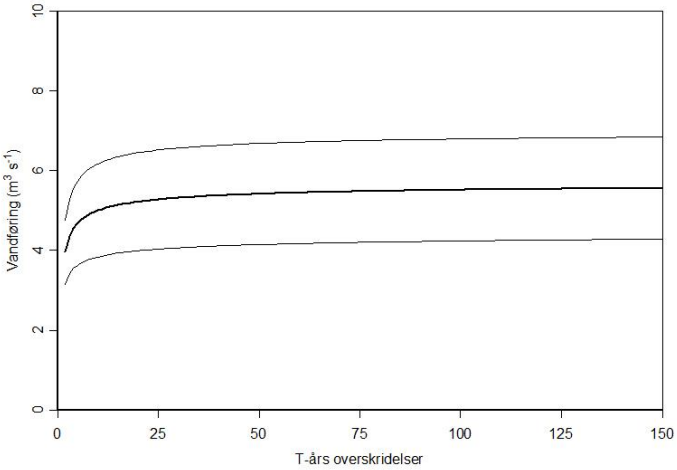




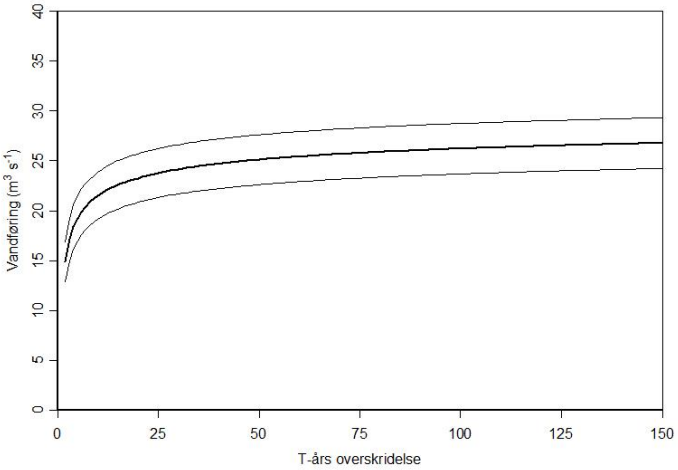
1961 – 1990 1991 - 2010

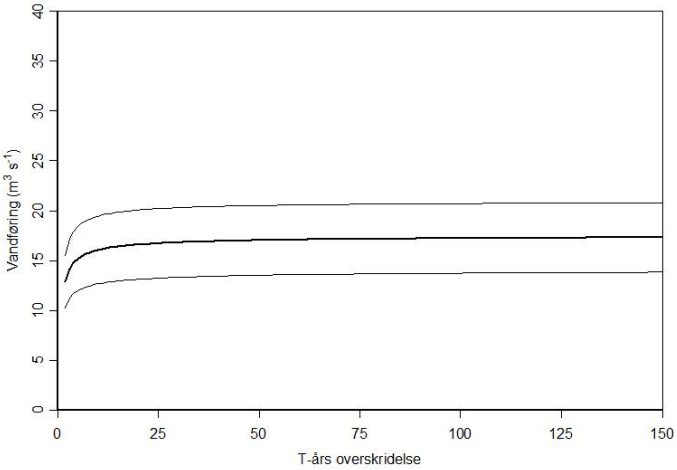
330004 Spang Å, Bredstrup



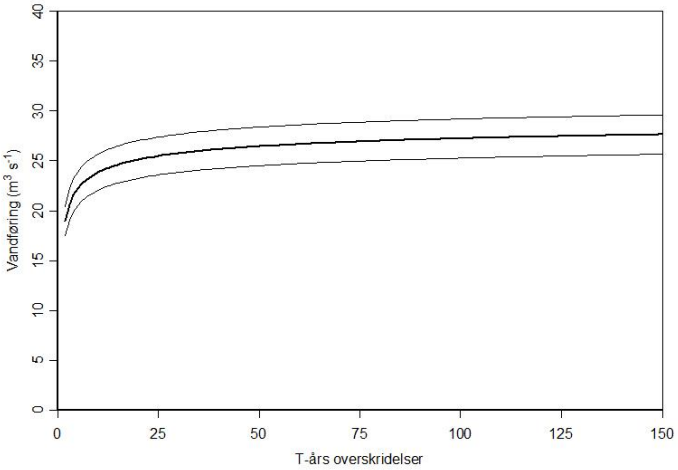


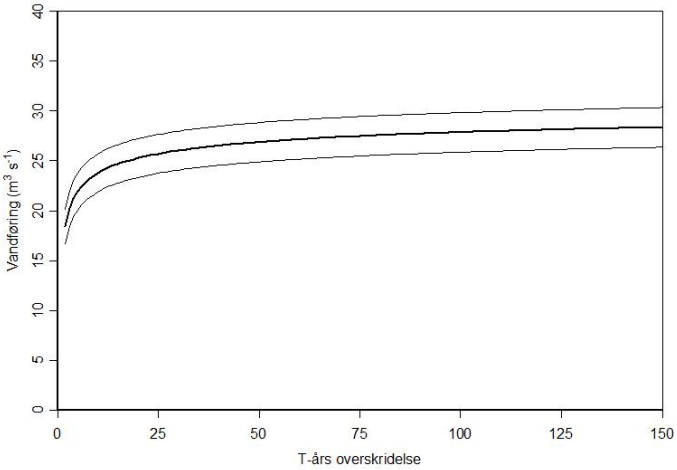
350010 Sneum Å, Nørå Bro





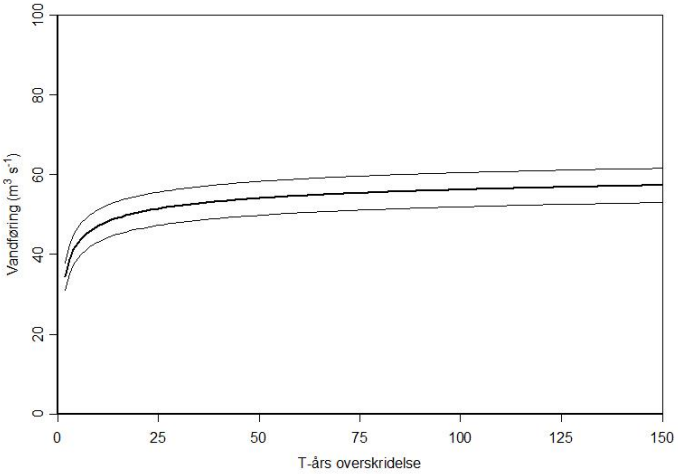
360008 Kongeå, Kongebro

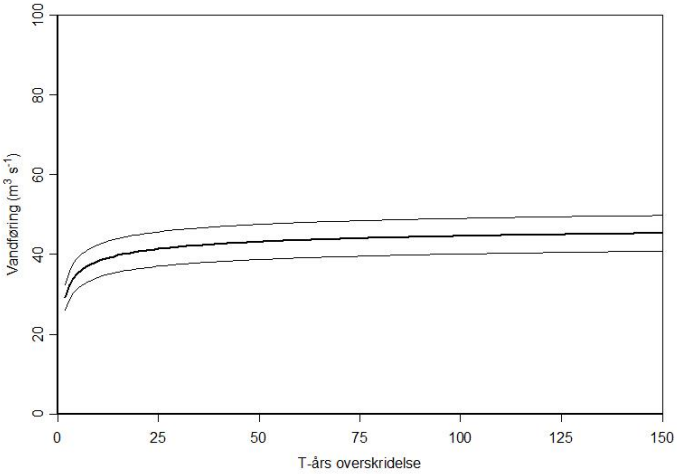




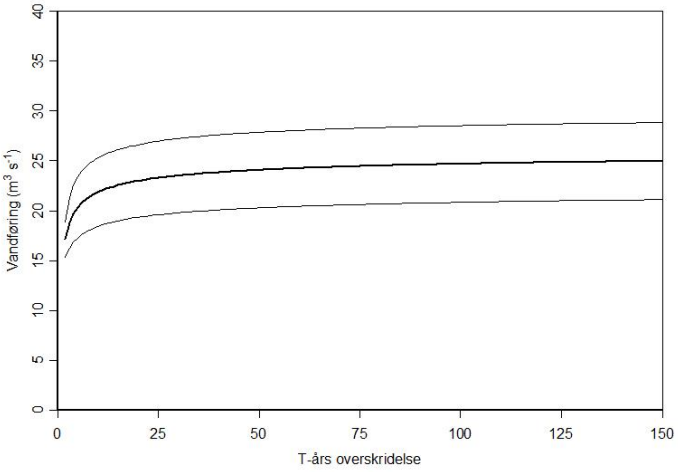
1961 – 1990 1991 - 2010

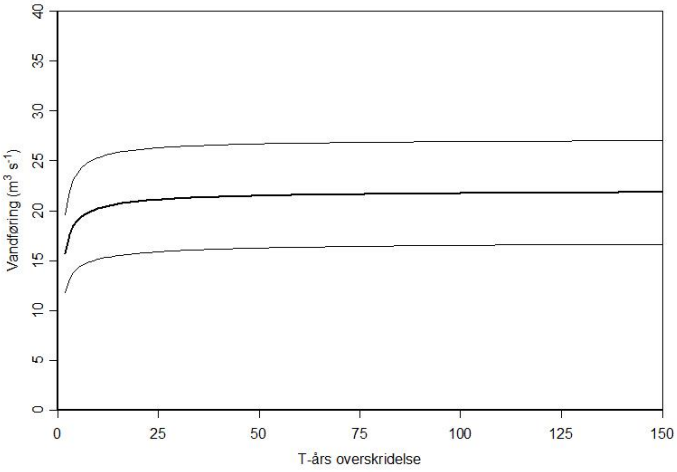
380024 Ribe Å, Stavnager



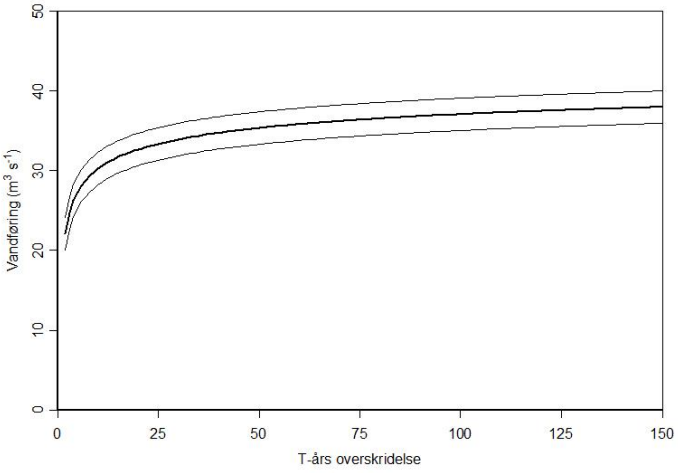


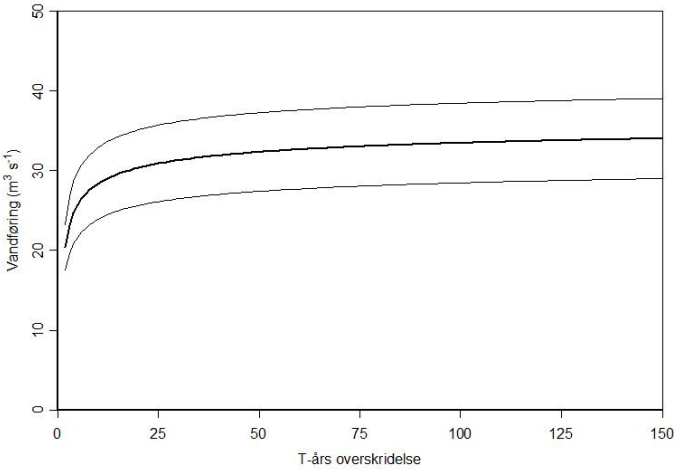
400001 Brede Å, ns Jernbanebro





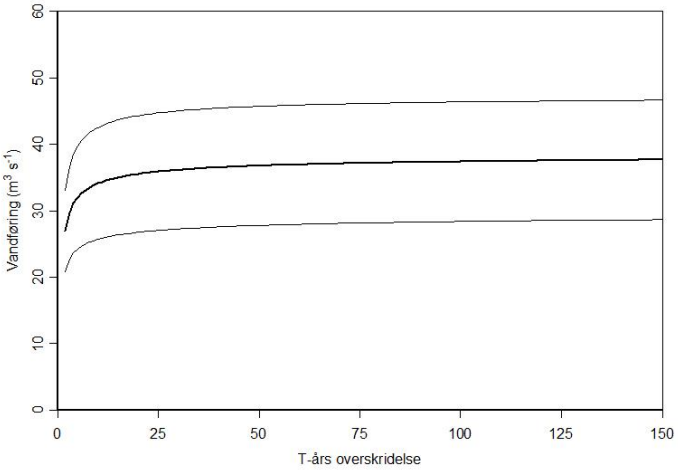
420016 Grønå, Rørkær

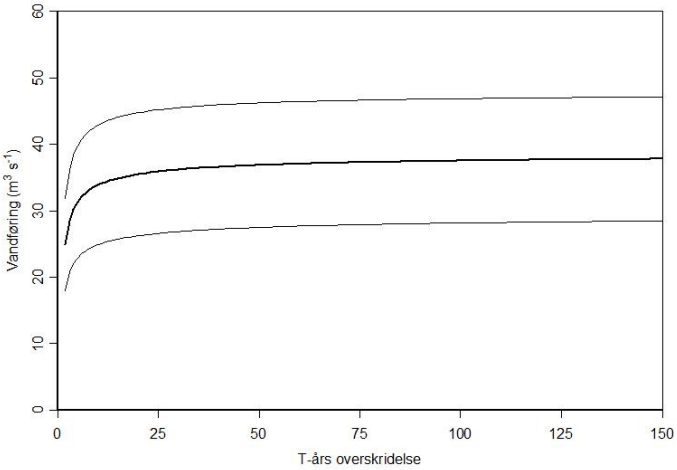




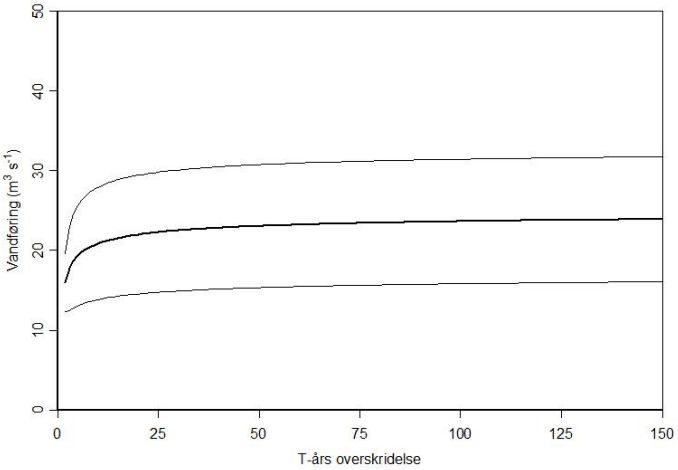
1961 – 1990 1991 - 2010

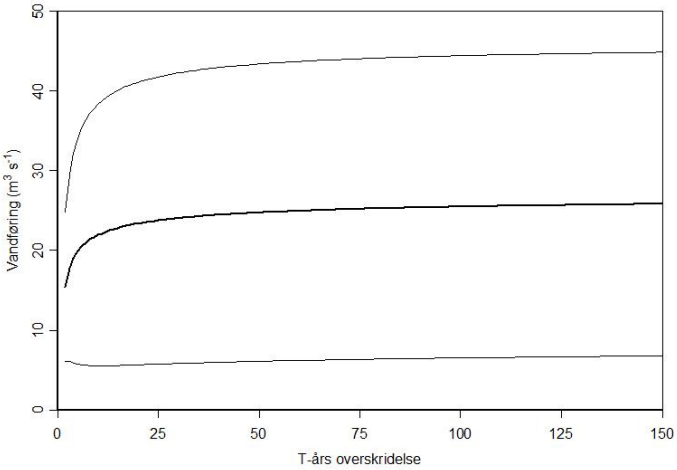
450001 Odense Å, Nørre Broby



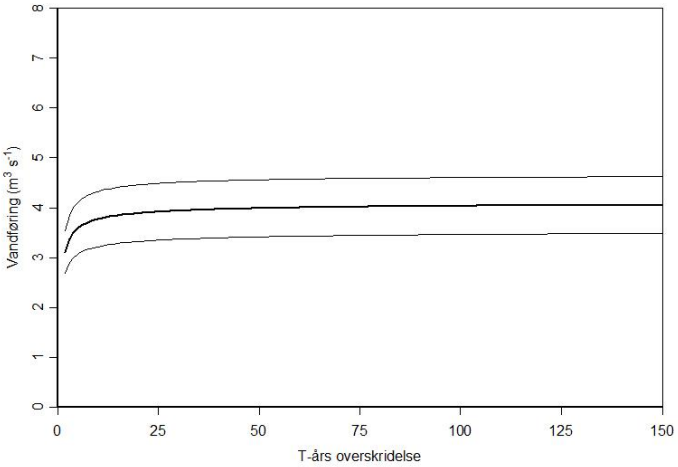


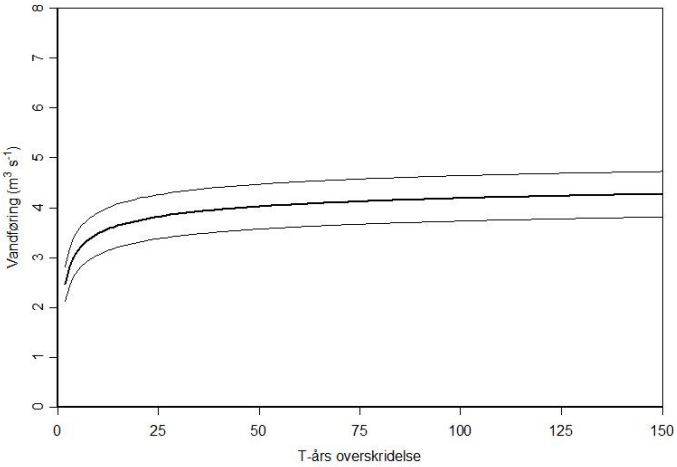
450004 Odense Å, Ejby Mølle





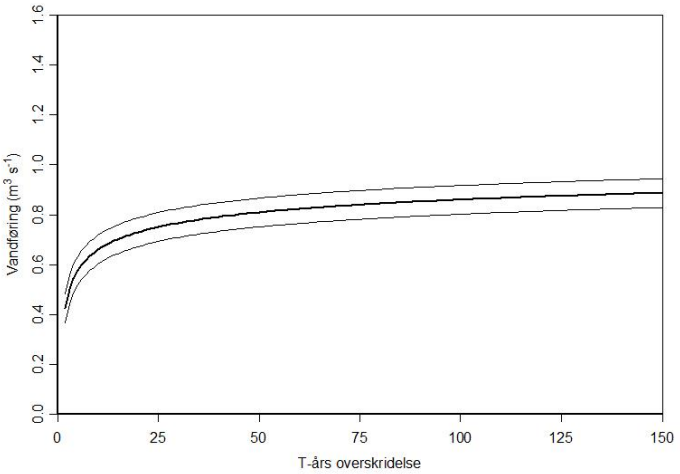
460030 Brende Å, Årup

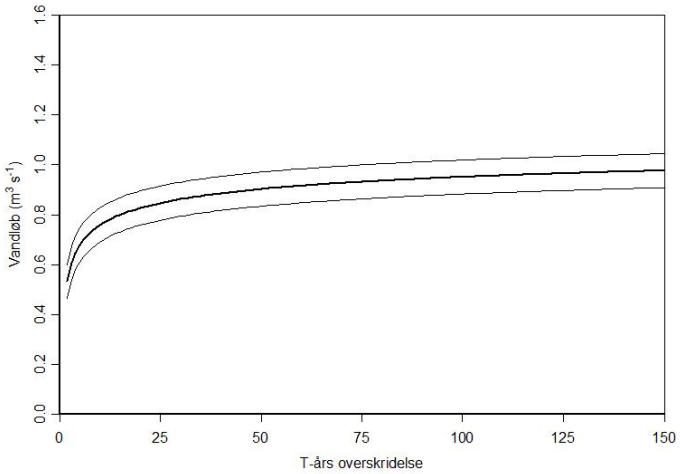




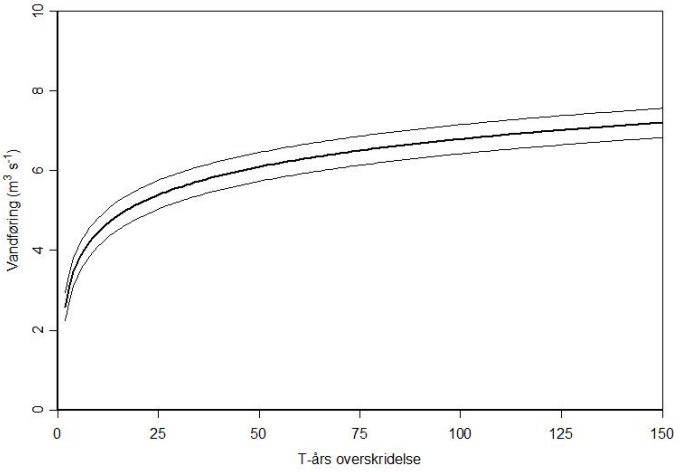
1961 – 1990 1991 - 2010

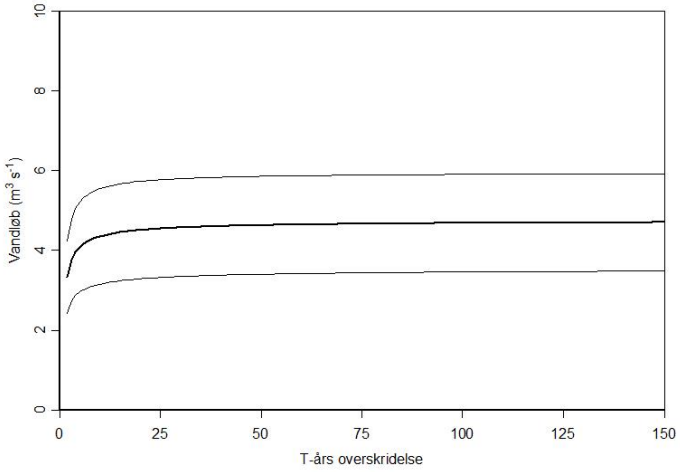
520025 Græse Å, Hørup



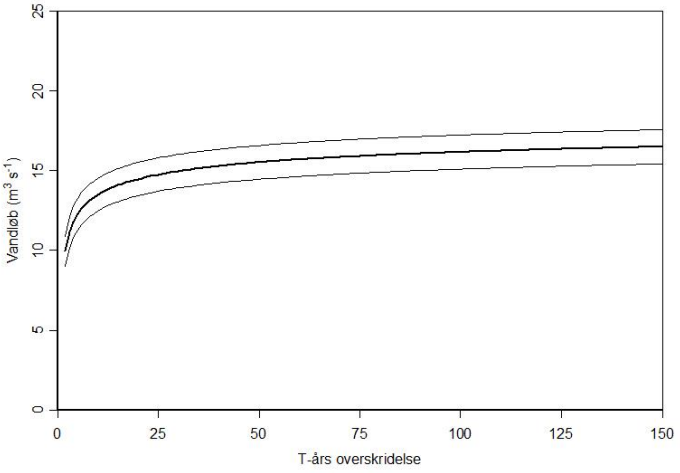


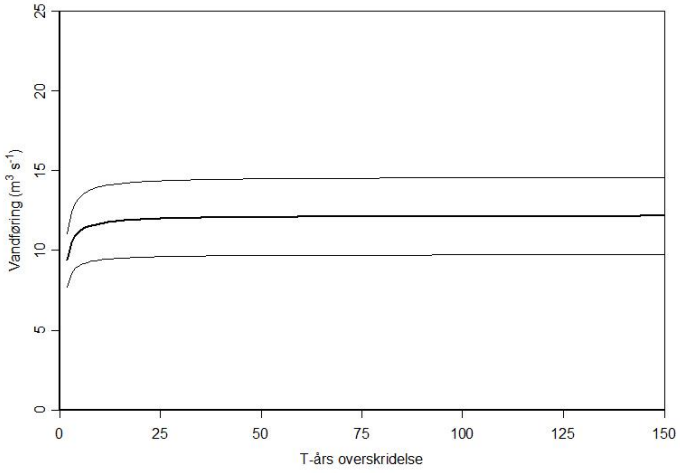
520029 Havelse Å, Strø





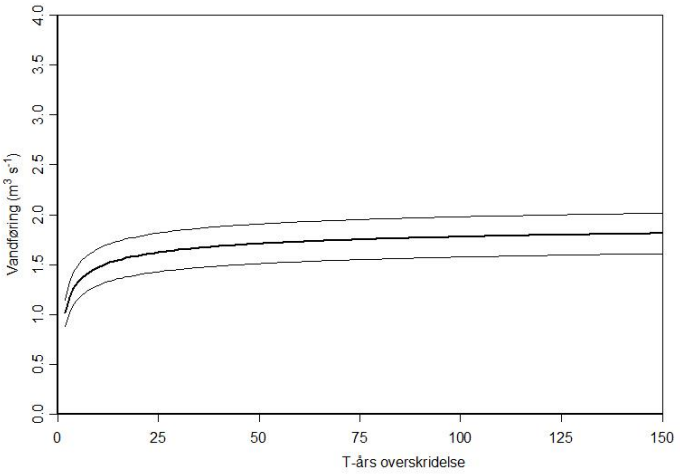
550018 Åmose Å, Bromølle

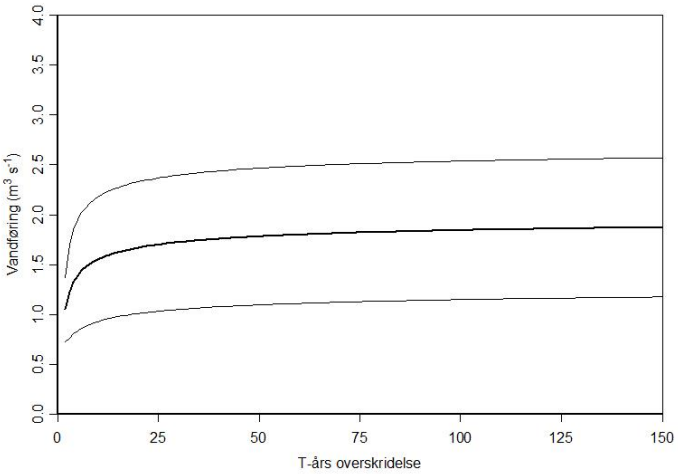




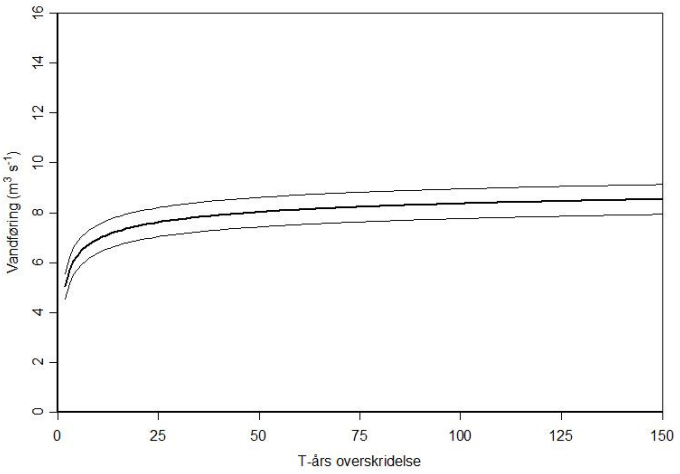
1961 – 1990 1991 - 2010

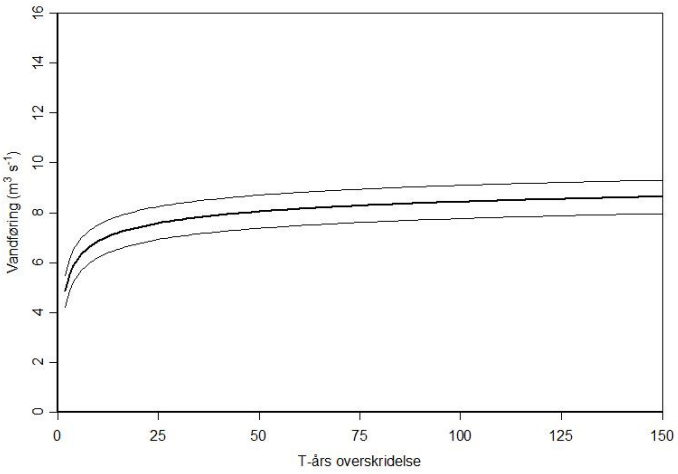
560006 Harrested Å, Kramsvadgård



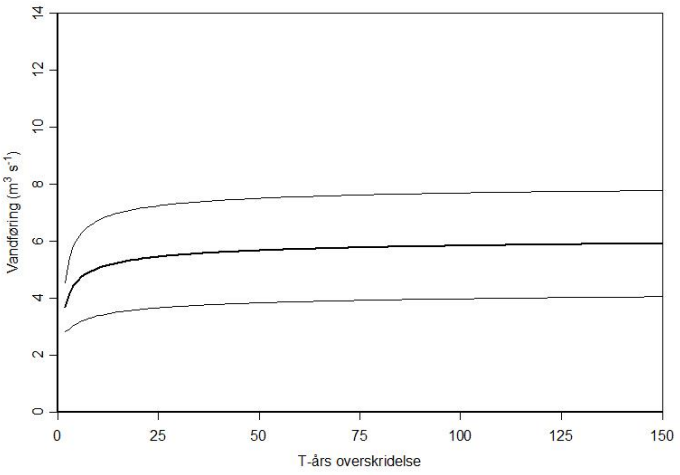


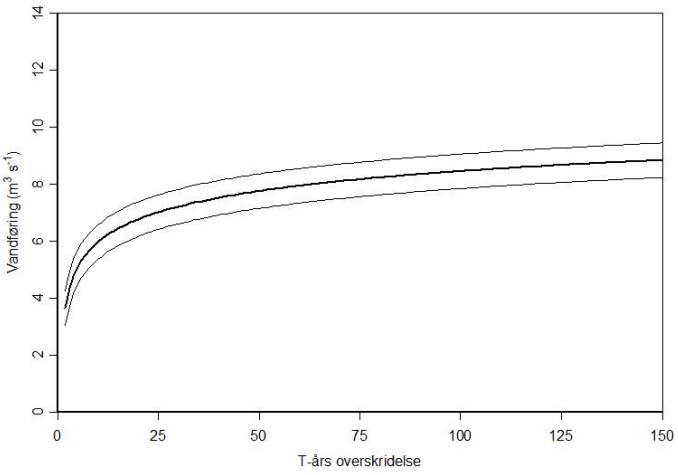
560007 Tude Å, Ørslev





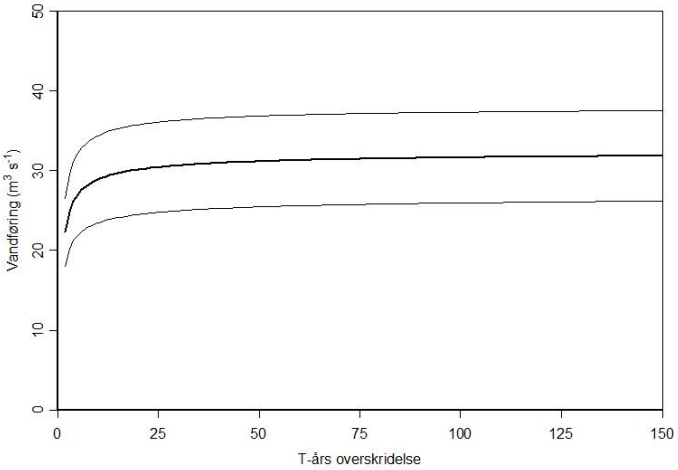
570049 Saltø Å, Grønbro

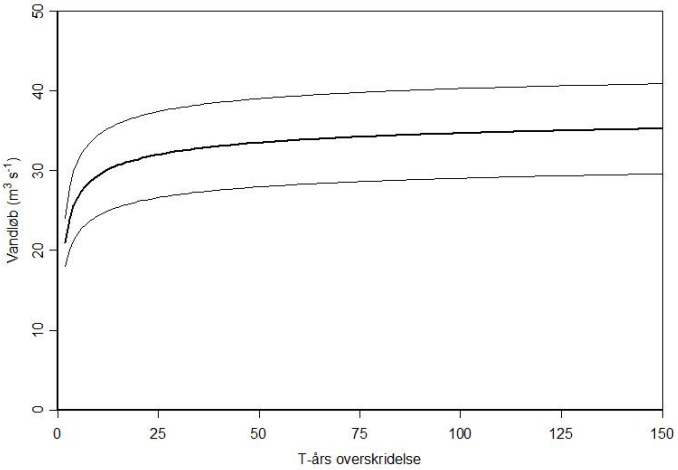




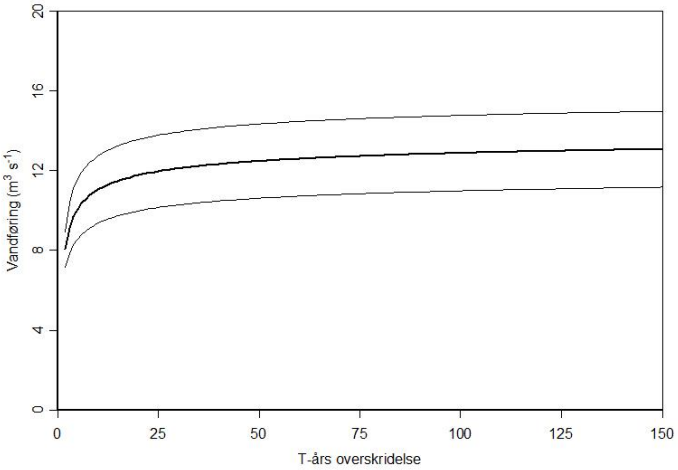
1961 – 1990 1991 - 2010

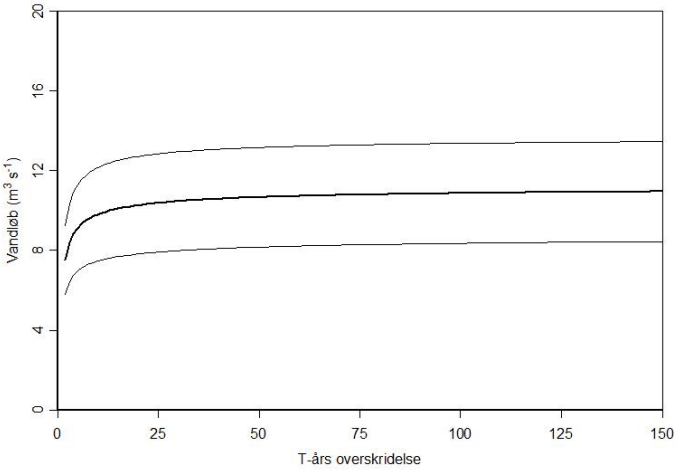
570058 Suså, Holløse Mølle



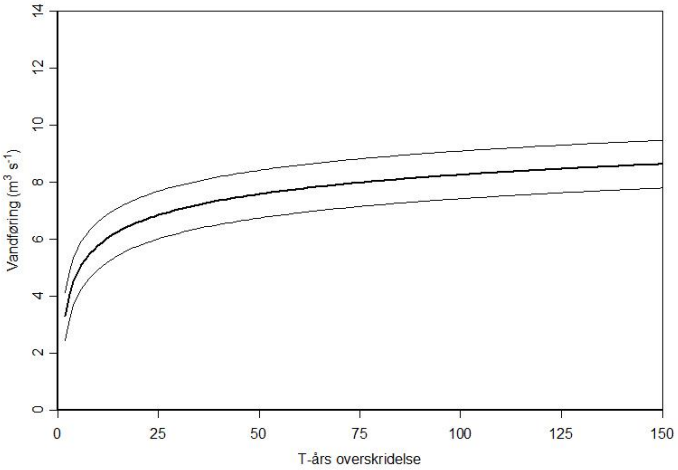


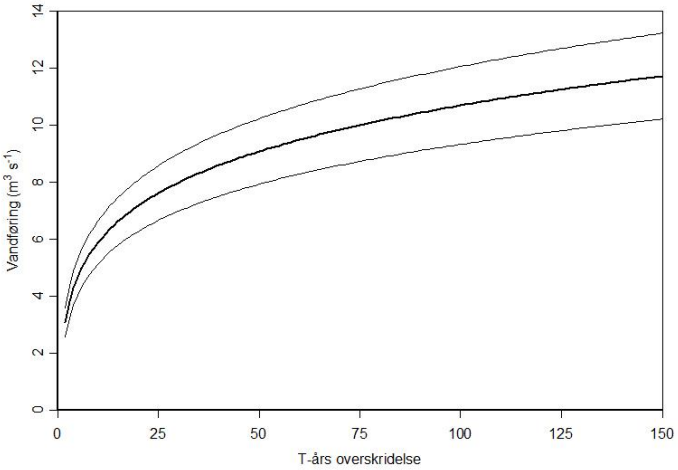
590006 Tryggevælde Å, Lille Linde





660014 Bagge Å, Hasle Klinker





Appendiks 2: Statistiske metoder

Her beskrives de statistiske fordelinger, der er anvendt i forbindelse med karakterisering af årlig ekstremvandføringer. Men først beskrives kort teorien bag statistiske fordelinger, og hvordan man estimerer parametre i fordelinger. Til sidst viser gennemgår vi teorien for frekvensanalyse, det vil sige beregning af *T*-års over- og underskridelser. Ekstremværdier er i dette notat årlige maksimumsafstrømninger. Ved de statistiske beregninger med hensyn til fordelinger og frekvensanalyse har vi anvendt SAS® og S-PLUS®. For yderligere og fuldstændig behandling af de emner der er omtalt i dette appendiks henvises til *Kite* (1978).

Statistiske fordelinger

En statistisk fordeling kan beskrive egenskaberne ved en population af værdier. Population af ekstremværdier beskrives i dette notat ved en række forskellige kontinuerte statistiske fordelinger. Kontinuerte fordelinger kan antage alle værdier i et interval, som muligvis kan være uendeligt.

En statistisk fordeling er typisk defineret ved enten tæthedsfunktionen *f* eller fordelingsfunktionen *F*. Fordelingsfunktionen angiver sandsynligheden for at den stokastiske variabel (afstrømning eller ekstremværdi) er mindre end en givet værdi og kan beregnes som et integral af tæthedsfunktionen

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du .$$

Dermed er tæthedsfunktionen den afledede funktion af fordelingsfunktionen, det vil sige

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} .$$

Lad os antage, at vi har et sample af observationer fra den samme statistiske fordeling, så kan den teoretiske fordelingsfunktion *F* estimeres ved den kumulative frekvens funktion (empiriske fordelingsfunktion)

$$F_s(x_i) = \sum_{j=1}^{i} f_s(x_j),$$

hvor f_s er den relative frekvens funktion defineret ved

$$f_s(x_i) = \frac{n_i}{n} ,$$

med *n* lig det totale antal observationer og n_i lig antallet af observationer i intervallet $[x_i - \Delta x, x_i]$. Man deler udfaldsintervallet for *X* op i et antal passende intervaller, hver med en bredde på Δx . Den relative frekvens funktion er et estimat for følgende sandsynlighed

$$P(x_i - \Delta x \le X \le x_i).$$

Hvis vi lader $n \to \infty$ og $\Delta x \to 0$ så har vi i grænsen lighederne

$$f(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \frac{f_s(x)}{\Delta x} ,$$

og

$$F(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} F_s(x).$$

Den teoretiske værdi for den relative frekvens funktion kan beregnes som

$$p(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Estimation af parametre i fordelinger

I dette har vi anvendt maximum likelihood metoden til estimering af parametre i de statistiske fordelinger. Metoden er defineret på følgende måde. Antag, at vi har et sample af størrelse *n*, dvs. $x_1, x_2, \ldots, x_n$. For en fordeling med en tæthedsfunktion $f(x;\alpha,\beta,\ldots)$, hvor $\alpha,\beta,\ldots$ er fordelingsparametrene, som skal estimeres, er sandsynligheden for at få en given værdi af *x*, x_i, proportional med $f(x;\alpha,\beta,\ldots)$ og sandsynligheden for at observere et sample af *n* værdier $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er proportional med produktet

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha,\beta,\ldots).$$

Dette produkt kaldes for likelihood og maximum likelihood metoden består i at estimere $\alpha,\beta,\ldots$, sådan at *L* bliver maksimeret. Dette gør man ved partiel differentiation af *L* med hensyn til hver af fordelingsparametrene og sætte de fremkomne udtryk lig nul. For at simplificere beregningerne er det en god ide at anvende $\log(L)$ i stedet for *L*.

Den generaliserede ekstremværdifordeling

Den generaliserede ekstremværdifordeling (GEVD) er en 3-parameter fordeling og blev første gang beskrevet af Jenkinson (1955) og er siden blevet anvendt til beskrivelse af årsmaksimum og årsminimum i hydrologien og meteorologien. Vi har anvendt GEVD til beskrivelse både af årsmaksima i dette notat. De 3 parametre er en central parameter (η), en skala parameter (θ) og en form parameter (κ) (*Kite, 1978*).

Fordelingsfunktionen for den generaliserede ektremværdifordeling er

$$F(x;\eta,\theta,\kappa) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1-\kappa(x-\eta)/\theta\right]^{1/\kappa}\right\}, & \kappa \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left[-(x-\eta)/\theta\right]\right\}, & \kappa = 0 \end{cases},$$

hvor $-\infty < \eta < \infty$, $\theta > 0$ og $-\infty < \kappa < \infty$. Observationerne angivet ved *x* kan antage værdierne

$$\begin{cases} -\infty < x \leq \eta + \dfrac{\theta}{\kappa}, & \kappa > 0 \\ \eta + \dfrac{\theta}{\kappa} \leq x < \infty, & \kappa < 0 \\ -\infty < x < \infty, & \kappa = 0. \end{cases}$$

Når $\kappa = 0$ så er GEVD identisk med Type I ekstremværdi (Gumbel) fordelingen. Når $\kappa > 0$ så GEVD det samme som en Type II ekstremværdifordeling og når $\kappa < 0$ er GEVD identisk med Type III (Weibull) fordeling.

Frekvensanalyse (*T*-års overskridelsesfunktioner)

De estimerede fordelingsfunktioner kan anvendes til fastlæggelse af overskridelsesfunktioner. Sammenhængen mellem sandsynlighedsfordelingen (*F*) og overskridelsesperioden (*T*) for en givet afstrømningshændelse *q* er bestemt ved

$$F(q) = 1 - \frac{1}{T}, \text{ for årsmaksima.}$$

Som tidligere nævnt er de årlige ekstremværdier tilpasset familien af generaliserede ekstremværdifordelinger (GEVD), med parameterestimation efter maximum likelihood metoden. I det GEVD er en 3-parameter fordeling så er

$$\begin{aligned} q_T &= f(\eta,\theta,\kappa,T) \\ &= \eta + \theta\left(\frac{1-(-\log(F))^{\kappa}}{\kappa}\right) \end{aligned}$$

hvor log står for den naturlige logaritmefunktion.

Ved anvendelse af maximum likelihood metoden så kan variansen af q_T beregnes som

$$\begin{aligned} S_T^2 = &\left(\frac{\partial q_T}{\partial \eta}\right)^2 Var\,\eta + \left(\frac{\partial q_T}{\partial \theta}\right)^2 Var\,\theta + \left(\frac{\partial q_T}{\partial \kappa}\right)^2 Var\,\kappa \\ &+ 2\frac{\partial q_T}{\partial \eta}\frac{\partial q_T}{\partial \theta} Cov(\eta,\theta) + 2\frac{\partial q_T}{\partial \eta}\frac{\partial q_T}{\partial \kappa} Cov(\eta,\kappa) \\ &+ 2\frac{\partial q_T}{\partial \theta}\frac{\partial q_T}{\partial \kappa} Cov(\theta,\kappa) \end{aligned} .$$

De nødvendige varianser og covarianser bestemmes ved

$$\begin{Bmatrix} Var\,\eta & Cov(\eta,\theta) & Cov(\eta,\kappa) \\ & Var\,\theta & Cov(\theta,\kappa) \\ & & Var\,\kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}L & -\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \theta}L & -\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \kappa}L \\ & -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}L & -\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \kappa}L \\ & & -\frac{\partial^2}{\partial \kappa^2}L \end{Bmatrix}^{-1} .$$

Det vil sige det er nødvendigt at beregne den inverse af informationsmatricen for en GEVD. I *Prescott & Walden* (1980) forefindes der formler for de teoretiske middelværdier af elementerne af informationsmatricen. I formlerne indsættes parameterestimaterne. Formler for de observerede værdier af elementerne findes i *Prescott & Walden* (1983). I denne rapport har vi anvendt de teoretiske middelværdier. Disse formler kan kun anvendes når $|\kappa| < 0{,}5$, som i praksis næsten altid er opfyldt.

Under antagelse af, at q_T er normalfordelt, så kan 95 %-konfidensintervallet for q_T beregnes som

$$q_T \pm t \cdot S_T ,$$

hvor *t* er lig 1,96, som er 97,5 percentilen i en standard normalfordeling (dvs. en fordeling med middelværdi 0 og varians lig 1).